به نام پروردگار دانایی

هوش مصنوعی

درس یازدهم – منطق گزاره‌ای

سید کاوه احمدی

منطق گزاره‌ای (Propositional Logic)

- در منطق گزاره‌ای از روش اعلانی (Declarative) بهره گرفته می‌شود، یعنی بدون درنظر گرفتن نظرات برنامه نویس، عامل قادر است فقط با استفاده از گزاره‌ها، استنتاج لازم را از محیط انجام دهد.
- در منطق گزاره‌ای به ازای هر وضعیت گزاره‌ای مستقل بیان می‌شود.
  - به همین دلیل این منطق مستقل از متن (Context Free) محسوب می‌شود. یعنی هر جمله از سایر جملات مستقل است

نحو منطق گزاره‌ای

- خیلی ساده
- نه چندان مفید برای موقعیت‌های دنیای واقعی
- نمادها (Symbols):
  - ثابت‌های منطقی: True, False
  - نمادهای گزاره‌ای (Propositional Symbol): P, Q, …
    - هر یک از این نمادها به گزاره ای درست یا نادرست اختصاص دارد.
    - مثلا $W_{1,3}$ که برای حضور Wumpus در خانه [۱,۳] استفاده می‌شود
  - رابطهای منطقی
  - پرانتزها

نحو منطق گزاره‌ای - جملات

- جملات ساده (اتمیک – Atomic)
  - عناصر غیرقابل تجزیه از نظر نحوی
  - تشکیل شده از یک نماد گزاره‌ای.
  - TRUE و FALSE به خودی خود جمله‌اند.
  - لیترال یک جمله اتمی (لیترال مثبت)، یا یک جمله اتمی منفی (لیترال منفی) است.
- جملات پیچیده (Complex)
  - با استفاده از پرانتز به دور جملات
  - با استفاده از رابطهای منطقی، از جملات ساده‌تر ساخته می‌شوند.

نحو منطق گزاره‌ای - جملات

- ترکیب جملات ساده از طریق رابطهایمنطقی (Logical Connectives)
  - $\wedge$ (AND): ترکیبعطفی (Conjunctive) $Q \wedge P$
  - $\vee$ (OR): ترکیبفصلی (Disjunction) $Q \vee P$
  - $\Rightarrow$ (Implies): استلزام (Implication) $P \Rightarrow Q$
    - قواعد اگر آنگاه یا شرطی
    - دارای مقدمه یا مقدم (Antecedent/Premise) نتیجهیاتالی (Consequent/Conclusion)
  - $\Leftrightarrow$: دوشرطییا اگر و فقط اگر (Equivalent/Biconditional)
  - $\neg$ (NOT): نقیض (Negation)

نحو منطق گزاره‌ای

$$Sentence \rightarrow AtomicSentence \mid ComplexSentence$$

$$AtomicSentence \rightarrow \text{True} \mid \text{False} \mid Symbol$$

$$Symbol \rightarrow \text{P} \mid \text{Q} \mid \text{R} \mid \ldots$$

$$ComplexSentence \rightarrow \wedge \mid \vee \mid \Rightarrow \mid \Leftrightarrow \mid \neg$$

A BNF (Backus-Naur Form) grammar of sentences in propositional logic

- اولویت رابطها در منطق گزاره‌ای (از بیشتر به کمتر): $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

- E.g. $\sim P \vee Q \wedge R \Rightarrow S$ is equivalent to

$$\big((\sim p) \vee (Q \wedge R)\big) \Rightarrow S$$

معنا در منطق گزاره‌ای

- منطق گزاره‌ای در دنیای WUMPUS
  - قوانین را می‌توان با جملات بیان نمود:
    - $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$
  - بیان قانون به صورت زیرناقص است:
    - $B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$
    - فقط می‌گوید که اگر نسیم داشته باشیم چاله وجود دارد و نمی‌گوید که اگر نسیم نداشته باشیم چاله هم نداریم.
  - در خانه [۱,۱] گودالی وجود ندارد: $\neg P_{1,1}$

هوش مصنوعی ۸۳

- یک جنگل که به صورت یک شبکه ۵*۵ در شکل نشان داده شده است را در نظر بگیرید. عامل A می‌تواند ۹۰ درجه به یکی از جهات چهارگانه بچرخد و یا یک خانه به جلو حرکت کند. شیر L نیز می‌تواند آزادانه در جنگل حرکت کند. عامل A می‌تواند مکان و جهت خود را بداند. اگر بخواهیم از منطق گزاره‌ای برای نمایش دانش استفاده نماییم، برای بیان جمله‌ی «اگر در مقابل عامل شیر قرار ندارد، می‌تواند جلو برود» به چند گزاره احتیاج داریم؟

	A			
			L	

- به ۸۰ گزاره
  - در خانه‌های وسط ۴ حرکت مجاز، در خانه‌های گوشه ۲ حرکت و در خانه‌های مجاور دیوار به جز گوشه‌ها ۳ حرکت. برای هر حرکت مجاز باید یک گزاره بنویسیم:

$$4*9 + 3*12 + 4*2 = 80$$

معنا در منطق گزاره‌ای

- کاملا شفاف و صریح
- تفسیر هر نماد گزاره‌ای می‌تواند هر واقعیت دلخواه باشد.
  - واقعیت‌های جهان واقع را با نمادها نمایش می‌دهیم.
- معنای یک جمله‌ی ترکیبی از معنای اجزای آن قابل دستیابی است.
- هر حرف ربط منطقی را می‌توان یک تابع دانست.

معنا در منطق گزاره‌ای

- جدول درستی

Sentences

4 Models

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
False	False	True	False	False	True	True
False	True	True	False	True	True	False
True	False	False	False	True	False	False
True	True	False	True	True	True	True

معنا در منطق گزاره‌ای

- استفاده از جدول درستی در ساخت یک پایگاه دانش در دنیای WUMPUS
  - با استفاده از قوانین و مشاهدات می‌توان پایگاه دانش را ساخت.

KB

– در خانه [۱,۱] چاله‌ای وجود ندارد:

- R1: $\neg P_{1,1}$

– وجود چاله باعث ایجاد نسیم در خانه‌های مجاورش می‌شود:

- R2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$
- R3: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

– اکنون از مشاهده استفاده می‌کنیم:

- R4: $\neg B_{1,1}$
- R5: $B_{2,1}$

می‌توان KB به صورت ترکیب عطفی قوانین در نظر گرفت:

- R1 ^ R2 ^ R3 ^ R4 ^ R5

معنا در منطق گزاره‌ای

- $\alpha = \sim P_{1,2}$?
- استفاده از جدول درستی در ساخت یک پایگاه دانش در دنیای WUMPUS

$B_{1,1}$	$B_{2,1}$	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	$P_{3,1}$	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	KB
F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	F	T	T	T	F	T	F	F
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
F	T	F	F	F	F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	F	T	F	F	T	T	F
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
T	T	T	T	T	T	T	F	T	T	F	T	F

یک جدول درستی برای پایگاه دانش داده شده در متن. KB درست است اگر R1 تا R5 درست باشد که فقط در ۳ سطر از ۱۲۸ سطر جدول اتفاق می‌افتد. در تمام این ۳ سطر $P_{1,2}$ نادرست است پس چاله‌ای در [۱,۲] نیست.

- جمله‌ای با n نماد، 2^n تفسیر متفاوت دارد.
- در اینجا ۷ نماد داریم بنابراین جدول درستی ۱۲۸ سطر خواهد داشت.

معنا در منطق گزاره‌ای

- استفاده از جدول درستی در ساخت یک پایگاه دانش در دنیای WUMPUS

- $\alpha = \sim P_{2,2}$?
  - مطابق پایگاه دانش و جدول درستی، ممکن است در $P_{2,2}$ چاله باشد یا نباشد.

معنا در منطق گزاره‌ای

- استفاده از جدول درستی

function TT-ENTAILS?(KB, α) **returns** *true* or *false*
  inputs: KB, the knowledge base, a sentence in propositional logic
    α, the query, a sentence in propositional logic

  symbols ← a list of the proposition symbols in KB and α
  return TT-CHECK-ALL(KB, α, *symbols*, { })

---

function TT-CHECK-ALL(KB, α, *symbols*, *model*) **returns** *true* or *false*
  if EMPTY?(*symbols*) **then**
    if PL-TRUE?(KB, *model*) **then return** PL-TRUE?(α, *model*)
    else return *true* // *when KB is false, always return true*
  else do
    P ← FIRST(*symbols*)
    rest ← REST(*symbols*)
    return (TT-CHECK-ALL(KB, α, *rest*, *model* $\cup \{P = true\}$)
      and
      TT-CHECK-ALL(KB, α, *rest*, *model* $\cup \{P = false\}$))

معنا در منطق گزاره‌ای

- اعتبار (Validity) یک جمله را می‌توان با جدول درستی بررسی کرد.
  - جمله‌ای valid است که به ازای همه‌ی تفاسیر در جدول درستی، درست باشد.

معنا در منطق گزاره‌ای

- تساوی منطقی (Equivalence):
  - دو جمله از نظر منطقی هم ارز هستند (معادلند)، اگر در مجموعه یکسانی از مدل‌ها، درست باشند.
  - α و β هم ارز هستند $(\alpha \equiv \beta)$ اگر و تنها اگر $\beta \models \alpha$ و $\alpha \models \beta$

معنا در منطق گزاره‌ای

- تساوی منطقی

$(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha)$	commutativity of $\wedge$	جابجایی پذیری
$(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha)$	commutativity of $\vee$	
$((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma))$	associativity of $\wedge$	شرکت پذیری
$((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$	associativity of $\vee$	
$\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$	double-negation elimination	نقیض نقیض
$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$	contraposition	عکس نقیض
$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$	implication elimination	حذف نتیجه‌گیری
$(\alpha \Leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$	biconditional elimination	حذف دو شرطی
$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$	de Morgan	دمورگان
$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	de Morgan	
$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$	distributivity of $\wedge$ over $\vee$	توزیع‌پذیری $\wedge$ روی $\vee$
$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$	distributivity of $\vee$ over $\wedge$	توزیع‌پذیری $\vee$ روی $\wedge$

قواعد استنتاج در منطق گزاره‌ای

- قضیه استنتاج (Deduction Theorem)
  - برای هر دو جمله α و β داریم:
    - $\alpha \models \beta$ اگر و تنها اگر جمله $\alpha \Rightarrow \beta$ معتبر باشد.
    - الگوریتم استنتاج در واقع اعتبار جمله $kb \Rightarrow \beta$ را بررسی می‌کند.

قواعد استنتاج در منطق گزاره‌ای

- الگوهای استنتاجی که بکرات اتفاق می‌افتد و می‌توان درستی آنها را با جدول درستی بررسی کرد.
  - الگوهایی استانداردی وجود دارد که زنجیره‌ای از نتایج را برای رسیدن به هدف ایجاد می‌کند.
  - در استنتاج می‌توان از هم ارزی‌های منطقی نیز استفاده نمود.
- چند قانون که معمولا برای استنتاج مورد استفاده قرار می گیرند در اینجا بیان شده‌اند:

قواعد استنتاج در منطق گزاره‌ای

- یک فرم بیانی جدید برای قوانین استنتاج:
  - از α (فرض – Premise) می‌توان β (نتیجه – Conclusion) را نتیجه گرفت.

$$\frac{\alpha}{\beta}$$

- یک قانون استنتاج ارضا شدنی است اگر نتیجه هرجا که فرض درست است، درست باشد.

قواعد استنتاج در منطق گزاره‌ای

- تمام روابط تساوی منطقی می‌توانند به شکل قاعده استنتاج بیان شوند:

$$\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)} \quad and \quad \frac{(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)}{\alpha \Leftrightarrow \beta}$$

قواعد استنتاج در منطق گزاره‌ای

- حذف AND (And-Elimination)
  - هر عطف را می‌توان از ترکیب عطفی استنتاج کرد:

$$\frac{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n}{\alpha_i}$$

مثال:

$$\frac{WumpusAhead \wedge WumpusAlive}{WumpusAlive}$$

قواعد استنتاج در منطق گزاره‌ای

- قانون انتزاع یا قیاس استثنایی (`Modus Ponens or Implication-Elimination`)
  - هر وقت جمله‌ای به شکل $a \Rightarrow b$ داده شود و a درست باشد جمله b را می‌توان استنتاج کرد.

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha}{\beta}$$

مثال:

$$\frac{(WumpusAhead \wedge WumpusAlive \Rightarrow Shoot), (WumpusAhead \wedge WumpusAlive)}{Shoot}$$

قواعد استنتاج در منطق گزاره‌ای

- قانون نفی تالی (Modus Tollens)

$$\frac{P \Rightarrow Q, \neg Q}{\neg P}$$

  - باران دلالت بر پالتوهای خیس دارد، پالتوها خیس نیستند ← باران نمی‌بارد

قواعد استنتاج در منطق گزاره‌ای

- قانون Resolution

$$\frac{\alpha \vee \beta,\ \neg\beta \vee \gamma}{\alpha \vee \gamma} \quad \textbf{or equivalently} \quad \frac{\neg\alpha \Rightarrow \beta,\ \beta \Rightarrow \gamma}{\neg\alpha \Rightarrow \gamma}$$

نحوه به کار گیری قواعد استنتاج

- در مثال قبل

KB:

R1: $\sim P_{1,1}$

R2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

R3: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

R4: $\sim B_{1,1}$

R5: $B_{2,1}$

R6: $(B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1})$	Biconditional Elimination to R2
R7: $((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1})$	And Elimination to R6
R8: $(\sim B_{1,1} \Rightarrow \sim(P_{1,2} \vee P_{2,1}))$	Contrapositives
R9: $\sim(P_{1,2} \vee P_{2,1})$	Modus Ponens with R8 and R4
R10: $\sim P_{1,2} \wedge \sim P_{2,1}$	de Morgan Rules

هیچ یک از خانه های [1,2] و [2,1] حاوی سیاهچاله نیستند.

قواعد رفع

- Unit Resolution

$$\frac{l_1 \vee \cdots \vee l_k, \quad m}{l_1 \vee \cdots \vee l_{i-1} \vee l_{i+1} \vee \cdots \vee l_k}$$

  - l_i: لفظ (Literal): یک سمبل مثبت یا منفی
  - l_i و m لفظهای مکمل هستند ($l_i =\sim m$).

مثال:

$$\frac{P_{1,1} \vee P_{3,1}, \quad \sim P_{1,1}}{P_{3,1}}$$

قواعد رفع

- Resolution

$$\frac{l_1 \lor \ldots \lor l_k, \quad m_1 \lor \ldots \lor m_n}{l_1 \lor \cdots \lor l_{i-1} \lor l_{i+1} \lor \cdots \lor l_k \lor m_1 \lor \cdots \lor m_{j-1} \lor m_{j+1} \lor \cdots \lor m_n}$$

  - l_i: لفظ (Literal): یک سمبل مثبت یا منفی
  - l_i و m_j لفظهای مکمل هستند ($l_i =\sim m_j$).

مثال:

$$\frac{P_{1,1} \lor P_{3,1}, \quad \sim P_{1,1} \lor \sim P_{2,2}}{P_{3,1} \lor \sim P_{2,2}}$$

قواعد رفع

- اثبات Sound بودن

$$\frac{\sim (l_1 \vee \cdots \vee l_{i-1} \vee l_{i+1} \vee \cdots \vee l_k) \Rightarrow l_i \qquad \sim m_j \Rightarrow \left(m_1 \vee \cdots \vee m_{j-1} \vee m_{j+1} \vee \cdots \vee m_n\right)}{\sim (l_1 \vee \cdots \vee l_{i-1} \vee l_{i+1} \vee \cdots \vee l_k) \Rightarrow \left(m_1 \vee \cdots \vee m_{j-1} \vee m_{j+1} \vee \cdots \vee m_n\right)}$$

قواعد رفع

- هر الگوریتم جستجوی کاملی که قاعده‌ی رفع را اعمال کند، قادر است تمام نتایج قابل نتیجه‌گیری از یک KB را در منطق گزاره‌ای استخراج کند.
- قاعده رفع می‌تواند در رد یا درستی یک جمله نظر دهد، اما قادر نیست جملات درست را از KB استخراج کند.
  - Refutation Completeness

Conjunction Normal Form (CNF)

- ترکیب عطفی (∧) جملات فصلی (∨)
  - $(A \vee \sim B) \wedge (B \vee \sim C \vee \sim D)$
- $\kappa - CNF\ sentences$
  - یک جمله‌ی $\kappa - CNF$ دقیقا k لفظ در هر گزاره دارد.
    - $(l_{1,1} \vee \cdots \vee l_{1,k}) \wedge \cdots \wedge (l_{n,1} \vee \cdots \vee l_{n,k})$

تبدیل به فرم CNF

1. حذف $\Leftrightarrow$:
   - جایگزینی $\alpha \Leftrightarrow \beta$ با $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$
2. حذف $\Rightarrow$:
   - جایگزینی $\alpha \Rightarrow \beta$ با $(\sim \alpha \vee \beta)$
3. کاهش حوزه اثرگذاری ~ به سطح لفظ (قوانین دمورگان)
   - جایگزینی $\sim (\alpha \vee \beta)$ با $(\sim \alpha \wedge \sim \beta)$
4. اعمال قوانین پخشی (distributive law)

تبدیل به فرم CNF

- مثال

- $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

1. $B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1}) \wedge (P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1}$
2. $(\sim B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \wedge (\sim (P_{1,2} \vee P_{2,1}) \vee B_{1,1})$
3. $(\sim B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \wedge ((\sim P_{1,2} \wedge \sim P_{2,1}) \vee B_{1,1})$
4. $(\sim B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \wedge (\sim P_{1,2} \vee B_{1,1}) \wedge (\sim P_{2,1} \vee B_{1,1})$

الگوریتم استنتاج رفع

- برای نشان دادن درستی $KB \vDash \alpha$، باید نشان دهیم که $KB \wedge\sim \alpha$ غیر قابل ارضا (Unsatisfiable) است (برهان خلف).
  - Clause (فراکرد/کلوز): یک ترکیب فصلی از لفظها (لیترال‌ها) است.

function PL-RESOLUTION(KB, α) **returns** *true* or *false*
  inputs: KB, the knowledge base, a sentence in propositional logic
      α, the query, a sentence in propositional logic

  $clauses \leftarrow$ the set of clauses in the CNF representation of $KB \wedge \neg\alpha$
  $new \leftarrow \{\}$
  loop do
    for each pair of clauses C_i, C_j **in** *clauses* **do**
      $resolvents \leftarrow$ PL-RESOLVE(C_i, C_j)
      if *resolvents* contains the empty clause **then return** *true*
      $new \leftarrow new \cup resolvents$
    if $new \subseteq clauses$ **then return** *false*
    $clauses \leftarrow clauses \cup new$

الگوریتم استنتاج رفع

1. $KB \wedge \sim \alpha$ را به CNF تبدیل می‌کنیم.
2. سپس قانون Resulotion به عبارات حاصل، اعمال می‌شود.
3. هر جفتی که شامل لیترال‌های مکمل باشد، Resulotion می‌شود تا عبارت جدیدی ایجاد گردد.
4. اگر این عبارت قبلا در مجموعه نباشد، به آن اضافه می‌شود.
5. فرایند تا محقق شدن یکی از شروط زیر ادامه می‌یابد:
   - هیچ عبارت دیگری وجود نداشته باشد که بتواند اضافه شود. در این مورد، KB استلزام α نیست.
   - کاربرد قانون Resolution، عبارت تهی را به دست می‌دهد که در این مورد، KB استلزام α است.

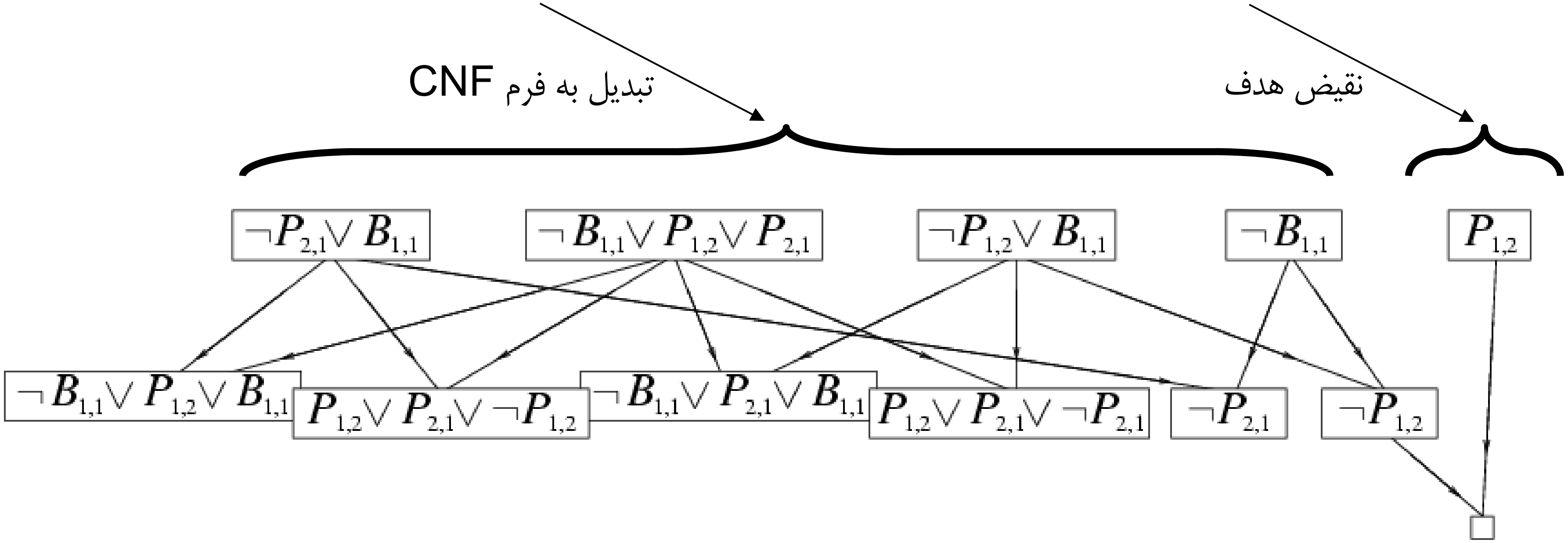
- الگوریتم Resolution کامل است یعنی اگر مجموعه‌ای از فراکردها ارضا نشدنی باشند، بستار Resolution آن فراکردها شامل فراکرد خالی است.

مثال الگوریتم استنتاج رفع

- وقتی عامل در [1,1] است نسیمی احساس نمی‌کند، پس چاله‌ای در خانه‌های همسایه وجود ندارد.
  - پایگاه دانش به صورت زیر است (خاصیت یکنوایی):
    - $KB = R_2 \land R_4 = (B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})) \land \neg B_{1,1})$
  - می‌خواهیم درستی $\alpha = \neg P_{1,2}$ را اثبات کنیم
    - ابتدا جمله $KB \land \sim \alpha$ را به فرم CNF تبدیل می‌کنیم.
    - روی هر جفت Clause قانون Resolution را اجرا می‌کنیم و سطر دوم را به دست می‌آوریم.
    - چون در نهایت به قانون تهی می‌رسیم، α پذیرفتنی است.

مثال الگوریتم استنتاج رفع

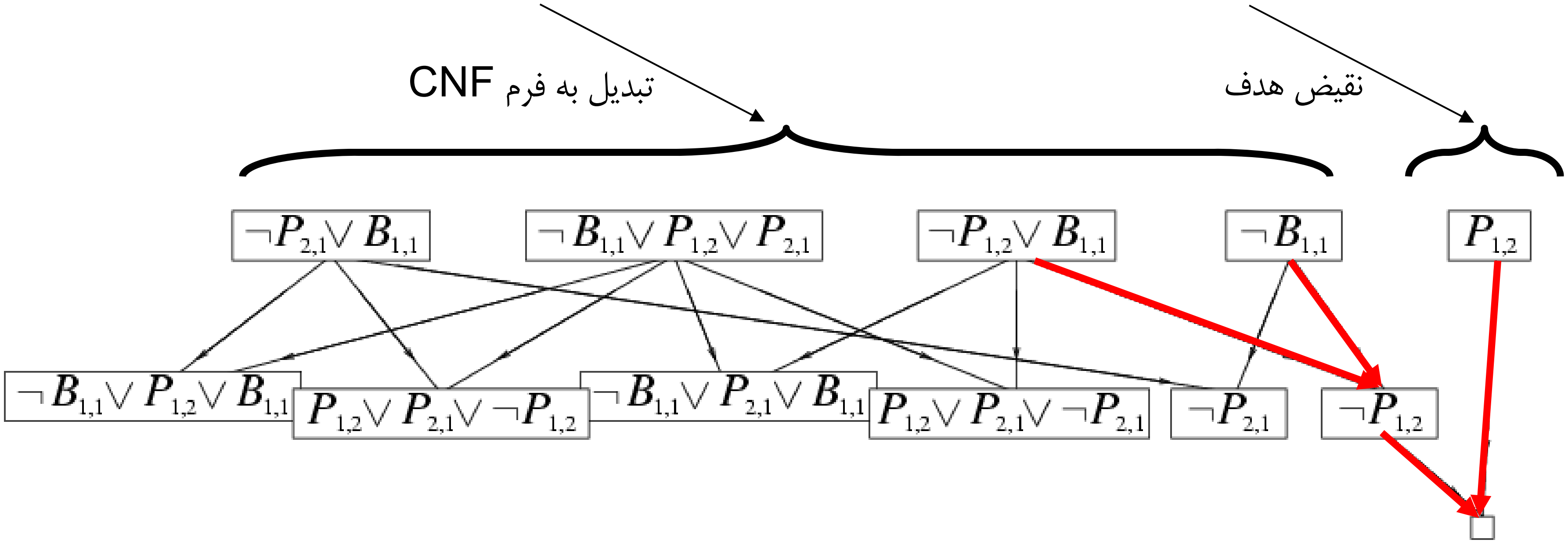
$KB = (B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge \neg B_{1,1}$	$\alpha = \neg P_{1,2}$



- قوانین تولید شده که در آن دو لیترال مکمل وجود دارد، می‌توانند حذف شوند.
- هر گاه بیش از یک جفت لیترال مکمل داشته باشیم فقط دو تا دو تا قابل حذف هستند و یکجا نمی‌توان همه را حذف کرد.

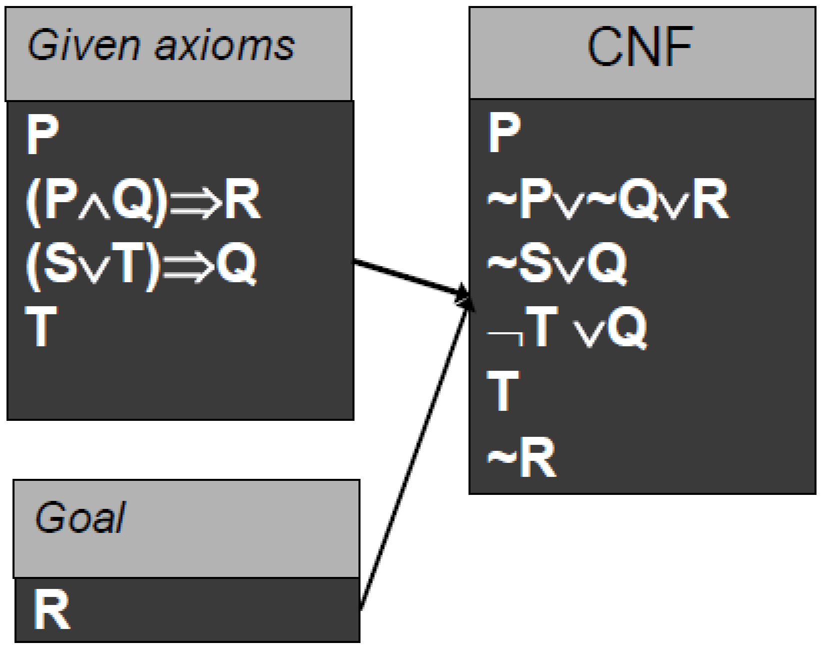
مثال الگوریتم استنتاج رفع

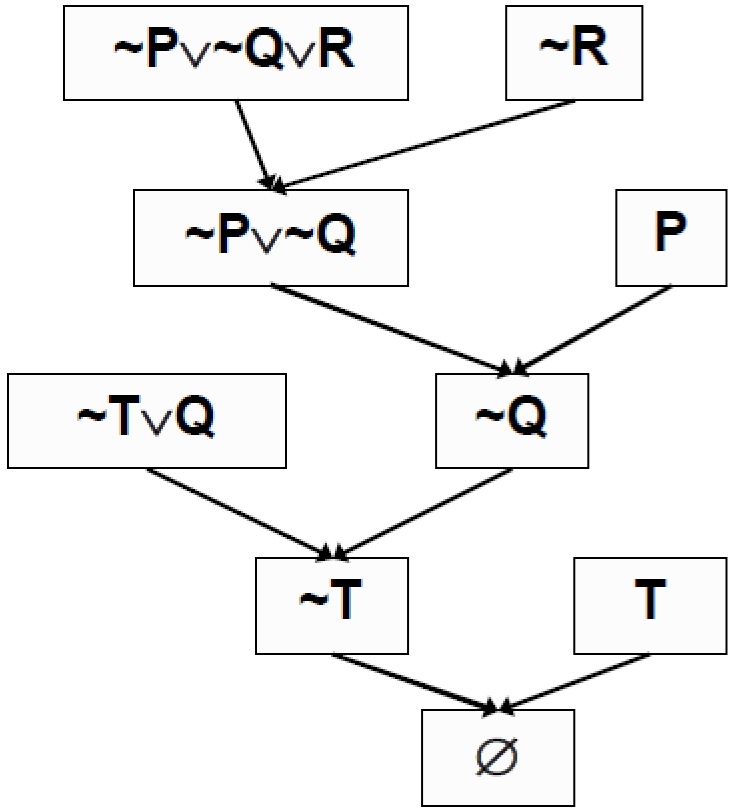
$KB = (B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge \neg B_{1,1}$	$\alpha = \neg P_{1,2}$



الگوریتم استنتاج رفع

- در استفاده از Resolution ترکیب یک Unit Clause با هر Clause دیگر می‌تواند آن را کوچکتر کند ولی در سایر موارد اینچنین نیست.





فرم Horn (Horn Clause)

- Clause: یک ترکیب فصلی از لفظها (لیترال‌ها)
- یک ترکیب فصلی از لفظها با حداکثر یک لفظ مثبت:
  - $(\sim L_{1,1} \vee \sim P_{1,2} \vee P_{2,1})$
- دلایل اهمیت حداکثر بودن یک لفظ مثبت:
  - هر عبارت Horn را می‌توان به صورت یک implication نوشت که خواناتر و ساده فهم‌تر است:
  - $\sim L_{1,1} \vee \sim P_{1,2} \vee P_{2,1} \longrightarrow \underbrace{\underbrace{(L_{1,1} \wedge P_{1,2})}_{\text{Body}} \Rightarrow \underbrace{P_{2,1}}_{\text{Head}}}_{\text{Definite Clause}}$

فرم Horn

- Fact: یک عبارت Horn بدون لفظ منفی
  - $P_{2,1}$
- Integrity Constrain: یک عبارت مثبت بدون لفظ مثبت
  - $(L_{1,1} \land P_{1,2}) \Rightarrow False$

فرم Horn

- قانون انتزاع یا قیاس استثنایی (Modus Ponens for Horn Form)

$$\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \beta}{\beta}$$

استنتاج با عبارات Horn

- استنتاج با عبارات هورن، از طریق الگوریتم‌های زنجیر پیشرو و زنجیر عقبگرد انجام پذیر است.

زنجیر پیشرو (Forward Chaining)

- الگوریتم زنجیر پیشرو تعیین می‌کند آیا نماد گزاره‌ای q (تقاضا)، توسط پایگاه دانش عبارات هورن ایجاب می‌شود یا نه.
- ایده اصلی
  - اجرای هر قاعده‌ای که صحت فرض‌های (Premise) آن اثبات شده باشد.
  - اضافه کردن نتیجه (Conclusion) آن قاعده به پایگاه دانش.
  - تکرار به شکل زنجیره‌ای
- Forward Chaining برای پایگاه دانش Horn کامل و صحیح است.

زنجیر پیشرو (Forward Chaining)

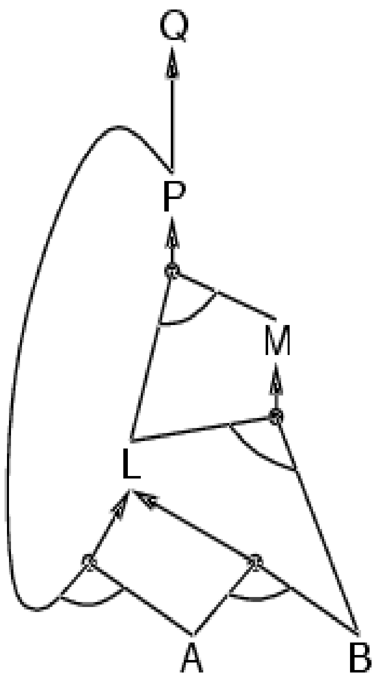
```
function PL-FC-ENTAILS?(KB, q) returns true or false
  inputs: KB, the knowledge base, a set of propositional definite clauses
          q, the query, a proposition symbol
  count ← a table, where count[c] is the number of symbols in c's premise
  inferred ← a table, where inferred[s] is initially false for all symbols
  agenda ← a queue of symbols, initially symbols known to be true in KB

  while agenda is not empty do
      p ← POP(agenda)
      if p = q then return true
      if inferred[p] = false then
          inferred[p] ← true
          for each clause c in KB where p is in c.PREMISE do
              decrement count[c]
              if count[c] = 0 then add c.CONCLUSION to agenda
  return false
```

زنجیر پیشرو (Forward Chaining)

$$P \Rightarrow Q$$
$$L \wedge M \Rightarrow P$$
$$B \wedge L \Rightarrow M$$
$$A \wedge P \Rightarrow L$$
$$A \wedge B \Rightarrow L$$
$$A$$
$$B$$

Fact/هیچ پیش شرطی ندارند (سمت راست قانونی نیستند)

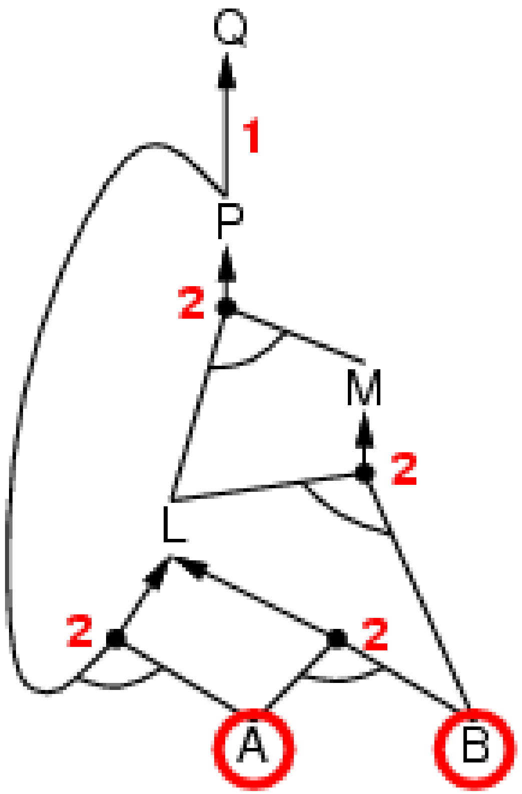
Horn & definite Clause



AND/OR Graph

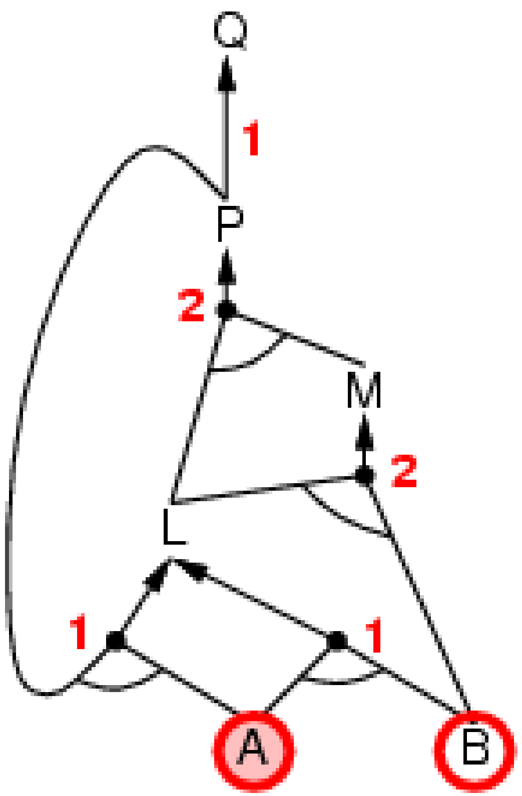
زنجیر پیشرو (Forward Chaining)

- از A و B شروع می‌کنیم.

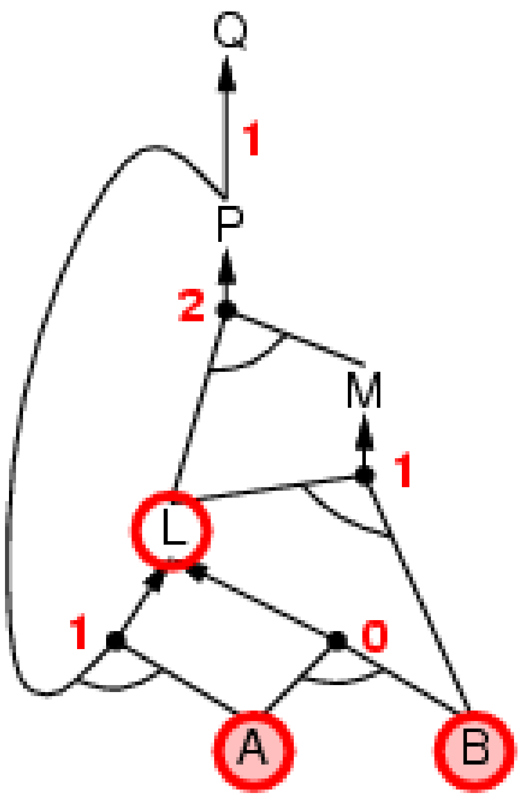


زنجیر پیشرو (Forward Chaining)

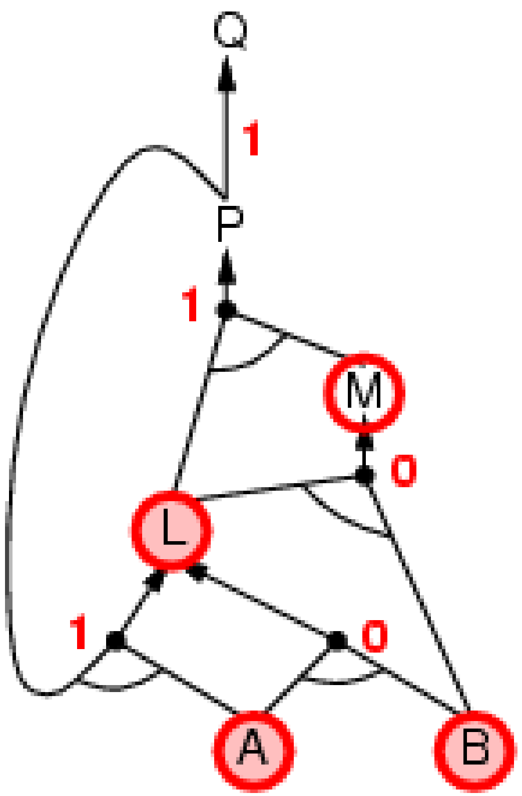
- L نتیجه می‌شود.



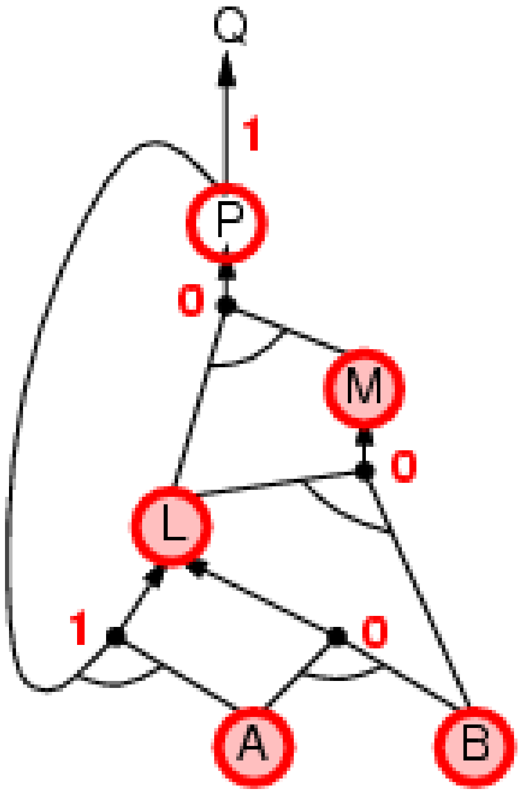
(Forward Chaining) زنجیر پیشرو



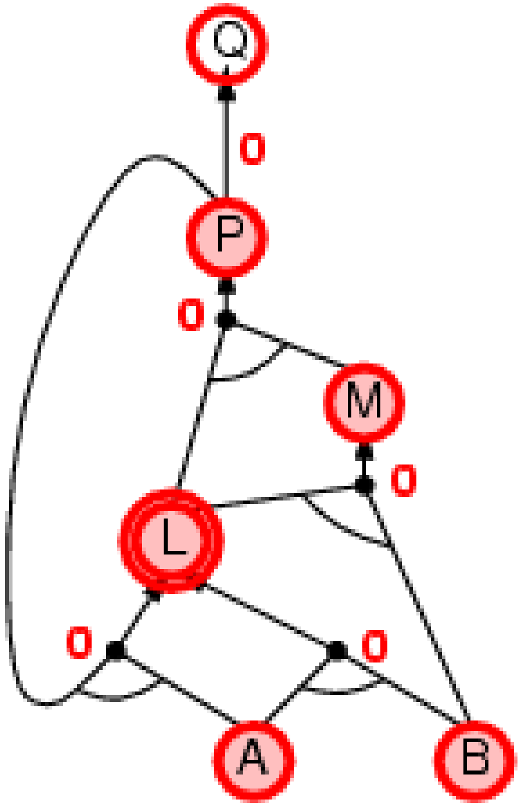
زنجیر پیشرو (Forward Chaining)



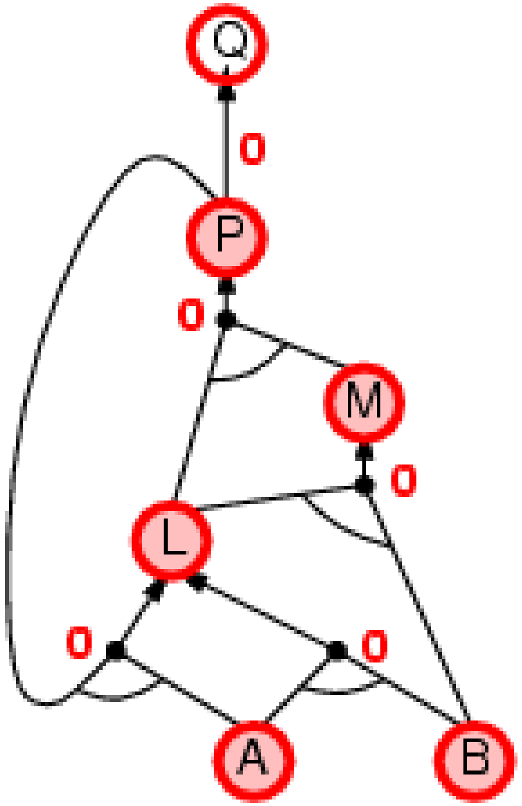
زنجیر پیشرو (Forward Chaining)



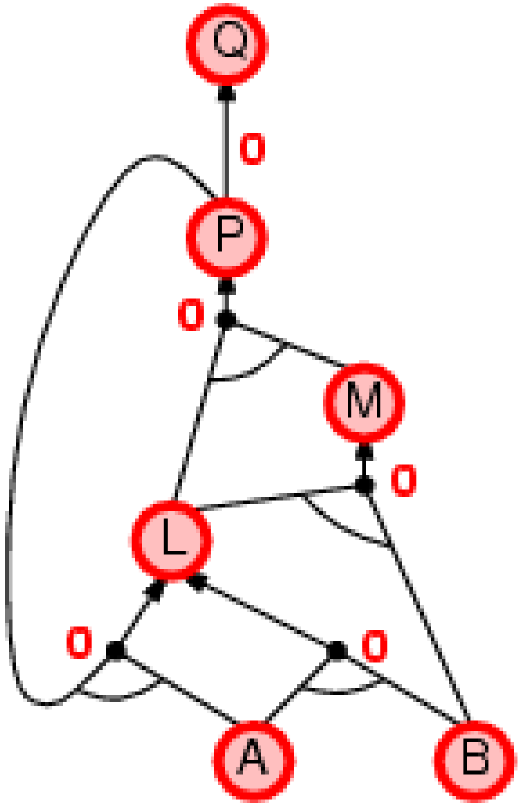
زنجیر پیشرو (Forward Chaining)



زنجیر پیشرو (Forward Chaining)



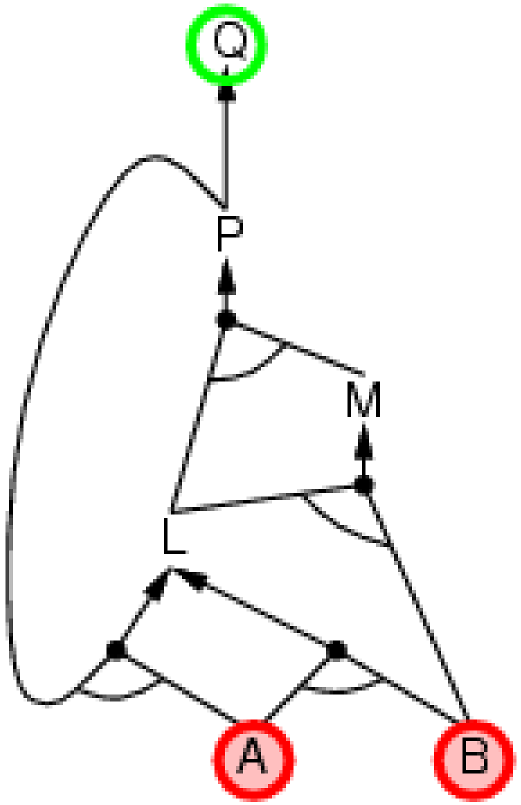
(Forward Chaining) زنجیر پیشرو



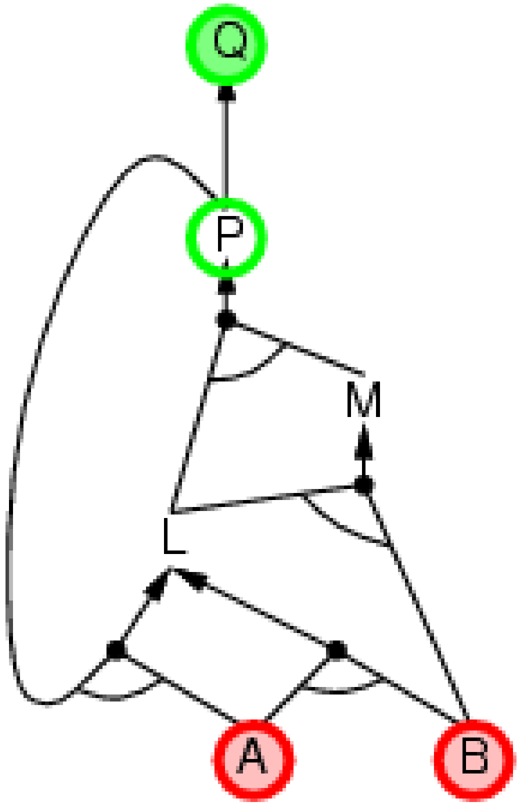
الگوریتم Backward Chaining

- ایده‌ی اصلی:
  - حرکت به سمت عقب از q خواسته شده.
- جهت اثبات α
  - تست صحت α یا
  - تست صحت تمام premiseهای قواعدی که α نتیجه آنها است.
- اجتناب از حلقه
  - تست اینکه آیا زیرهدف جدید هم اکنون در پشته‌ی هدف وجود دارد؟
- اجتناب از تکرار
  - تست اینکه آیا صحت زیر هدف جدید اثبات شده یا نه؟

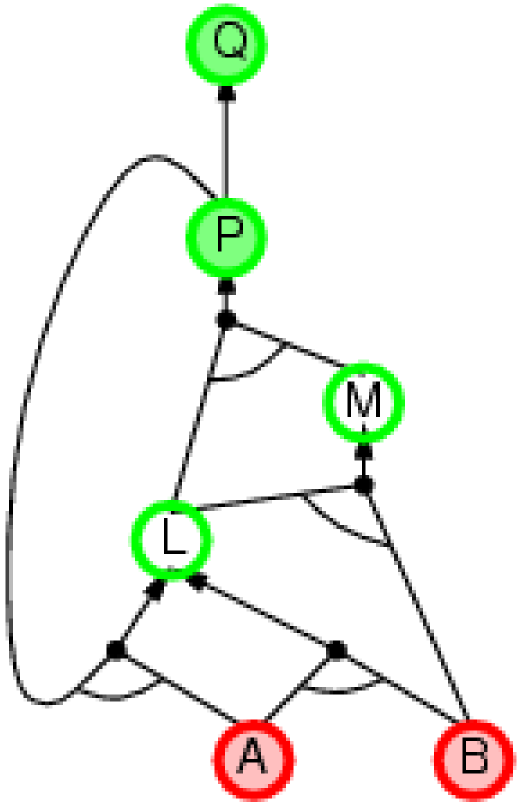
Backward Chaining الگوریتم



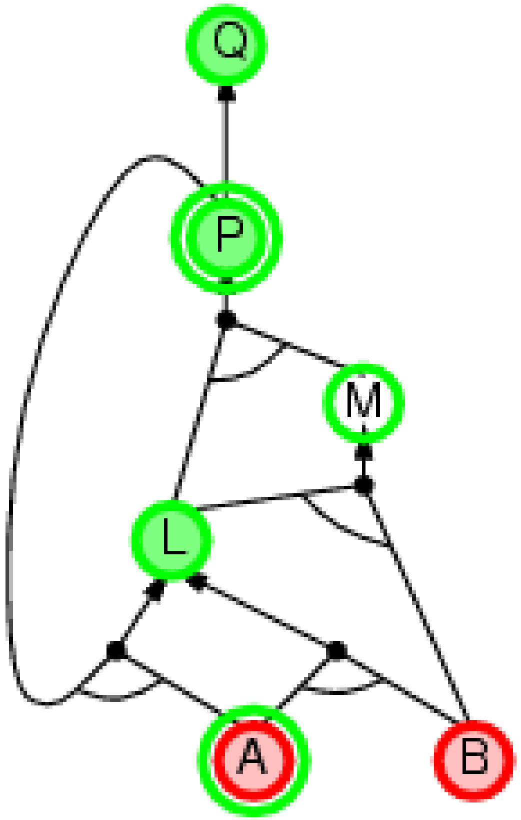
Backward Chaining الگوریتم



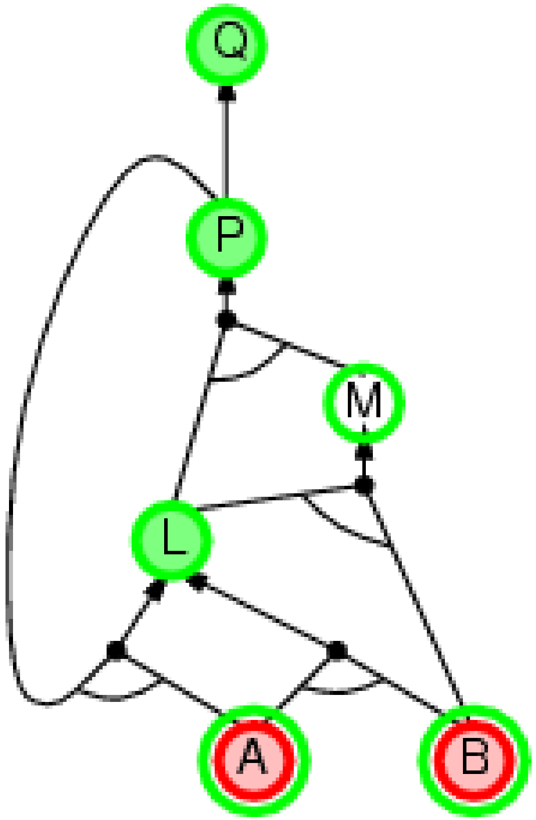
Backward Chaining الگوریتم



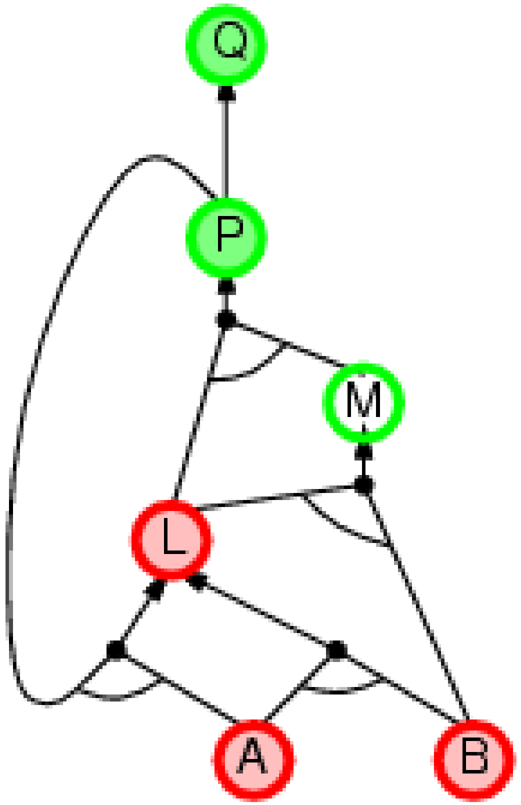
Backward Chaining الگوریتم



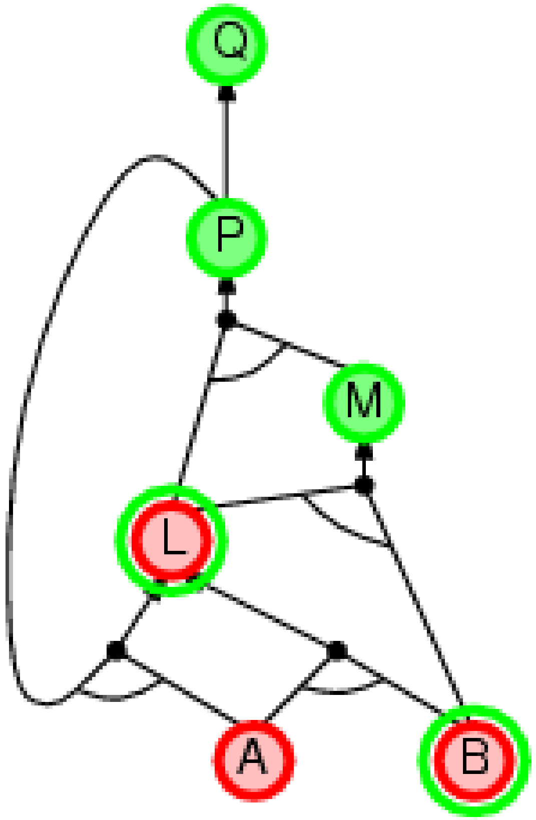
Backward Chaining الگوریتم



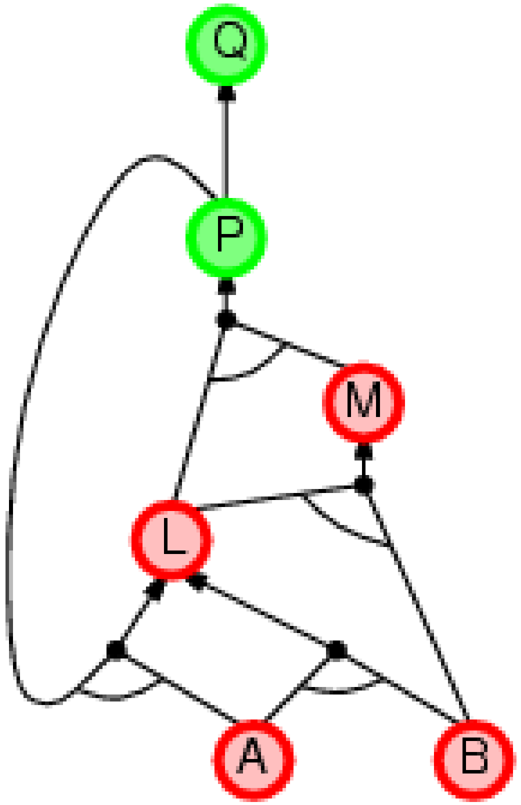
Backward Chaining الگوریتم



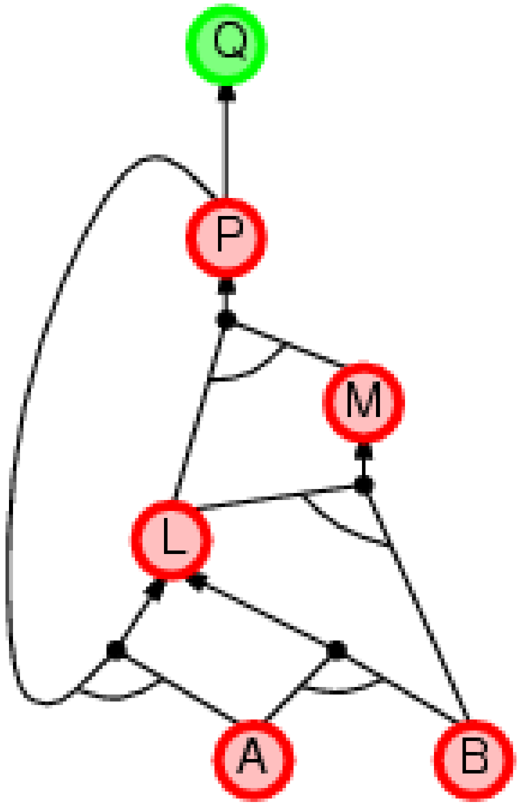
Backward Chaining الگوریتم



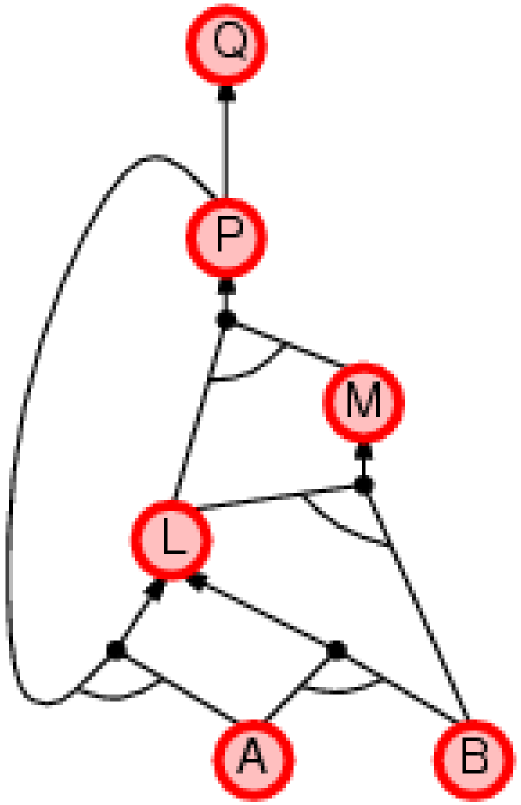
Backward Chaining الگوریتم



Backward Chaining الگوریتم



Backward Chaining الگوریتم



مهندسی ۹۲

- جملات منطق گزاره‌ای (Propositional Logic) α، β و γ را در نظر بگیرید. کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

1. اگر رابطه استلزام (Entailment) $\alpha \vee \beta \vDash \gamma$ برقرار باشد، آنگاه هر دو رابطه α $\vDash \gamma$ و $\beta \vDash \gamma$ برقرار است.
2. اگر روابط $\alpha \vDash \gamma$ و $\beta \vDash \gamma$ برقرار باشد، آنگاه رابطه $\alpha \vee \beta \vDash \gamma$ برقرار است.
3. اگر حداقل یکی از روابط $\alpha \vDash \gamma$ و $\beta \vDash \gamma$ برقرار باشد، آنگاه رابطه $\alpha \wedge \beta \vDash \gamma$ برقرار است.
4. اگر رابطه $\alpha \wedge \beta \vDash \gamma$ برقرار باشد، آنگاه حداقل یکی از روابط $\alpha \vDash \gamma$ و $\beta \vDash \gamma$ برقرار است.

مهندسی ۹۲

- گزینه ۴ پاسخ است.
  - اگر در هر مدلی که α درست است، β نیز درست باشد، آنگاه $\alpha \vDash \beta$
  - گزینه ۴ غلط است چون فقط در مدل‌هایی که $\alpha \wedge \beta$ درست است γ نیز برقرار است.
  - گزینه ۳ صحیح است چون اگر $\alpha \vDash \gamma$ یا $\beta \vDash \gamma$ برقرار باشد، γ برقرار است بنابراین در $\alpha \wedge \beta \vDash \gamma$ نیز γ برقرار است.

مهندسی ۹۲

- پایگاه دانش زیر مفروض است. کدام یک از گزینه‌های زیر با استفاده از روش رزولوشن (Resolution) از این پایگاه دانش قابل استنتاج است؟

1. S
2. W
3. V
4. T

$$P$$
$$V \vee T$$
$$\sim P \vee U$$
$$R \vee \sim Q$$
$$V \Rightarrow W$$
$$P \Rightarrow Q$$
$$S \Rightarrow (U \vee T)$$
$$(P \wedge R) \Rightarrow S$$

مهندسی ۹۲

- گزینه ۱ صحیح است.
  - قواعد را به فرم CNF بنویسید. از قواعدی که دارای لیترال‌های مکمل هستند شروع کنید و رزولوشن را روی آنها اعمال کنید:

1. P
2. $V \vee T$
3. $\sim P \vee U$
4. $R \vee \sim Q$
5. $\sim V \vee W$
6. $\sim P \vee Q$
7. $\sim S \vee U \vee T$
8. $\sim P \vee \sim R \vee S$

$1,6{:}\ Q\ (9)$

$4,9{:}\ R\ (10)$

$1,8{:}\ \sim R \vee S\ (11)$

$10,11{:}\ S$

آی تی ۹۲

- با فرض داشتن جملات زیر در پایگاه دانش، با استفاده از قوانین استنتاج، کدام یک از موارد زیر اثبات می‌شود؟

$$A \Rightarrow B \wedge C$$
$$C \Rightarrow D \vee E \vee F$$
$$B \Rightarrow D \wedge E$$
$$A$$

1. B
2. F
3. $C \vee E$
4. هیچ کدام

آی تی ۹۲

- روش اول:
  - قواعد را به فرم CNF بنویسید. از قواعدی که دارای لیترال‌های مکمل هستند شروع کنید و رزولوشن را روی آنها اعمال کنید:

1. $\sim A \vee B$
2. $\sim A \vee C$
3. $\sim C \vee D \vee E \vee F$
4. $\sim B \vee D$
5. $\sim B \vee E$
6. A

$1, 6: B\ (7)$

$1, 2: C$

$5, 7: E$

$4, 7: D$

- B، C، D و E *قابل استنتاج هستند بنابراین گزینه‌های ۱ و ۳ صحیح است.*
  - *سنجش گزینه را به عنوان پاسخ صحیح معرفی کرده است.*

آی تی ۹۲

- روش دوم: از گزاره درست موجود در پایگاه دانش شروع کنید:

KB:

$$\left.\begin{array}{c} A \\ A \Rightarrow B \wedge C \end{array}\right\} A \vDash B \wedge C \Big\} B \wedge C \vDash B, C$$

$$\left.\begin{array}{c} B \\ B \Rightarrow D \wedge E \end{array}\right\} B \vDash D \wedge E \Big\} D \wedge E \vDash D, E$$

- B، C، D و E قابل استنتاج هستند بنابراین گزینه‌های ۱ و ۳ صحیح است.
  - سنجش گزینه را به عنوان پاسخ صحیح معرفی کرده است.

مهندسی ۹۱

- اگر KB_1 یک پایگاه دانش دلخواه و b یک جمله دلخواه باشد، با فرض اینکه افزودن b به KB_1 منجر به ایجاد پایگاه KB_2 می‌شود، اگر جمله a از KB_1 قابل نتیجه‌گیری است، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

1. $a \wedge b$ از KB_1 قابل نتیجه‌گیری است.
2. a از KB_2 قابل نتیجه‌گیری است.
3. $a \wedge b$ از KB_2 قابل نتیجه‌گیری است.
4. $a \vee b$ هم از KB_1 و هم از KB_2 قابل نتیجه‌گیری است.

مهندسی ۹۱

- گزینه ۴ صحیح است.
  - a از KB_1 قابل نتیجه‌گیری است و b از KB_2 بنابراین $a \vee b$ از هر دو پایگاه دانش قابل نتیجه‌گیری خواهد بود.
  - گزینه ۲ غلط است چراکه ممکن است با اضافه شدن b به KB_2 قوانین که باعث استنتاج a می‌شدند از پایگاه دانش حذف شوند. بنابراین گزینه ۳ نیز غلط است.

مهندسی ۹۰

- اگر بدانیم:

$$E \wedge R \Rightarrow B$$
$$E \Rightarrow R \vee P \vee L$$
$$K \Rightarrow B$$
$$\sim (L \wedge B)$$
$$P \Rightarrow \sim K$$

کدام یک از موارد زیر با استدلال منطقی قابل نتیجه‌گیری نیست؟

1. $K \wedge E \Rightarrow R$
2. $E \wedge P$
3. $L \vee P \Rightarrow \sim K$
4. $\mathrm{L} \Rightarrow \sim (K \wedge E)$

مهندسی ۹۰

- گزینه ۲ صحیح است.
  - پایگاه دانش را به فرم بنویسید، نقیض گزاره‌های موجود در گزینه‌ها را به پایگاه دانش اضافه کنید. در صورتی که با اعمال رزولوشن به تناقض (تهی) رسیدید، گزاره قابل استنتاج است.
  - در حقیقت نیازی به این موضوع هم نیست! همانطور که خواهیم دید پاسخ صحیح دارد چشمک می‌زند!

مهندسی ۹۰

- برای گزینه ۱

1. $\sim E \vee \sim R \vee B$
2. $\sim E \vee R \vee P \vee L$
3. $\sim K \vee B$
4. $\sim L \vee B$
5. $\sim P \vee \sim K$

6. K
7. E
8. $\sim R$

$7, 2: P \vee L \vee R$ (9)
$6, 2: B$ (10)
$4, 10: \sim L$ (11)
$5,6: \sim P$ (12)
$9, 11: P \vee R$ (13)
$12, 13: R$ (14)
$8,14: \times$

گزینه ۱ به فرم CNF:

$\sim K \vee \sim E \vee R$

نقیض آن:

$K \wedge E \wedge \sim R$

مهندسی ۹۰

- برای گزینه ۲

1. $\sim E \vee \sim R \vee B$
2. $\sim E \vee R \vee P \vee L$
3. $\sim K \vee B$
4. $\sim L \vee B$
5. $\sim P \vee \sim K$

6. $\sim E \vee \sim P$

همانطور که پیشتر اشاره شد، در استفاده از Resolution ترکیب یک Unit Clause (فراکرد مجرد) با هر Clause دیگر می‌تواند آن را کوچکتر کند ولی در سایر موارد اینچنین نیست. در اینجا فراکرد مجردی نداریم بنابراین امکان کوچک شدن جملات و رسیدن به تناقض وجود ندارد.

بنابراین گزینه‌ای که نقیض آن فراکرد مجرد ایجاد نمی‌کند به جواب نزدیکتر است.

آی تی ۹۰

- کدامیک از گزینه‌های زیر از نظر منطقی همیشه درست است.

1. $(smoke \Rightarrow fire) \Rightarrow \big((smoke \land heat) \Rightarrow fire\big)$
2. $(big \land dumb) \Rightarrow \sim dumb$
3. $(smoke \Rightarrow fire) \Rightarrow (\sim smoke \Rightarrow \sim fire)$
4. $smoke \Rightarrow fire$

آی تی ۹۰

- پاسخ ۱ صحیح است

آی تی ۹۰

- کدامیک از عبارات زیر در مورد Forward Chaning و Backward Chaning نادرست است؟

1. BC هم به هدف و هم به حقایق نیاز دارد.
2. BC به حقایق نیازی ندارد.
3. سرعت BC بیشتر از FC است.
4. FC به هدف نیاز ندارد.

آی تی ۹۰

- گزینه ۲ پاسخ سنجش است.
  - بر اساس منطق(!) پاسخ یکی از گزینه‌های ۱ یا ۲ است.
    - زنجیر عقب‌گرد سعی می‌کند حقایق را اثبات کند بنابراین به آنها نیاز دارد (دلیل غلط بودن عبارت گزینه ۲)
  - BC چون یک الگوریتم مبتنی بر هدف (Goal Driven) است (از هدف آغاز می‌کند) نیازی ندارد از تمامی جملات پایگاه دانش (حقایق) نتیجه‌گیری‌هایی را انجام دهد و همین دلیل به مراتب از FC سریع‌تر است.
  - در زنجیر پیشرو از حقایق شروع می‌کنیم و به سمت هدف می‌رویم.
    - نیازی به مشخص بودن هدف نیست یعنی روال کلی الگوریتم بدون مشخص بودن هدف هم پیش می‌رود اما رسیدن به هدف شرط خاتم الگوریتم است (با این استدلال عبارت گزینه ۴ هم می‌تواند نادرست باشد).

آی تی ۹۰

- کدام عبارت در مورد زنجیر پیشرو و زنجیر عقب گرد غلط است؟

1. در زنجیر عقب گرد فقط از هدف به سمت حقایق حرکت باید صورت گیرد.
2. در زنجیر پیشرو نیازی به مشخص بودن هدف نیست.
3. در زنجیر عقب گرد هدف باید حتما مشخص باشد.
4. در زنجیر پیشرو فقط از حقایق به سمت هدف حرکت باید صورت گیرد.

آی تی ۹۰

- گزینه ۱ پاسخ سنجش است (گزینه ۲ هم به عنوان پاسخ مطرح می‌شود).
  - در زنجیر پیشرو از حقایق شروع می‌کنیم و به سمت هدف می‌رویم (گزینه ۴)
    - روال کلی الگوریتم بدون مشخص بودن هدف هم پیش می‌رود با این استدلال نیازی به مشخص بودن هدف نیست (گزینه ۲). اما رسیدن به هدف شرط خاتمه الگوریتم است (با این استدلال گزینه ۲ می‌تواند نادرست باشد).
  - در زنجیر عقب‌گرد از هدف به سمت عقب پیش می‌رویم (گزینه ۳)
    - زنجیر عقب‌گرد سعی می‌کند حقایق را اثبات کند (گزینه ۱). از طرفی می‌توان گفت زنجیر عقب‌گرد به سمت همه‌ی حقایق بر نمی‌گردد و فقط به حقایقی می‌رود که مورد نیازش است (توجیه اشتباه بودن جمله گزینه ۱).
- کلا ظاهرا نظر سنجش این است که FC نیازی به هدف ندارد!
  - توجیه: با مشخص نبودن هدف هم FC تمامی نتایج ممکن از حقایق را تولید می‌کند.

مهندسی ۸۹

- پایگاه دانشی فقط شامل جمله $P \vee Q \Rightarrow R \wedge M$ است، کدامیک از جملات زیر نتیجه منطقی (entailment) این پایگاه دانش است؟

1. $P \vee R$
2. $R \vee \sim Q$
3. $\sim M \vee Q$
4. $R \Rightarrow P$

مهندسی ۸۹

- گزینه ۲ صحیح است.
  - در صورتی که به هر دلیلی مقدم یک عبارت شرطی نادرست باشد، تالی هم نادرست خواهد بود.
  - در صورتی که «P یا Q» درست باشد، «R و M» درست خواهد بود.